التمرين الاول (5 نقاط) :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+10=0$.

استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث: $\left(\bar{z}+2\right)^2-6\left(\bar{z}+2\right)+10=0$

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A ،B ،C ،D لاحقاتها

$$z_A=3-i \quad و \quad z_B=3+i \quad و \quad z_C=1+i \quad و \quad z_D=1-i$$

عين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) E النقطة التي لاحقتها $z_E=7-3i$ و F صورتها بالدوران r ؛ تحقق أن لاحقة F هي $z_F=5+3i$

عين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$

4) مثل النقاط A ،B ،E ،F و H و عين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$

5) عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يمسح $\mathbb{R}^*$.

عين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-1-i|=|z-1+i|$.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

ليكن (p_1) و (p_2) المستويان ذا المعادلتين الديكارتيتين على الترتيب :

$$x-2y+4z-9=0 \quad ; \quad -2x+y+z-6=0$$

1) بين أن (p_1) و (p_2) متعامدان .نرمز بـ (D) إلى مستقيم تقاطع المستويين (p_1) و (p_2) .

بين أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \quad : \quad t\in R \\ z=t \end{cases}$.

2) لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (D) و لتكن A النقطة ذات الإحداثيات $(-1;-4;-9)$. تحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (p_1) و لا إلى المستوي (p_2) ثم بين أن :

$$AM^2=14t^2-14t+21$$

3) لتكن f الدالة العددية المعرفة على R بـ : $f(t)=14t^2-14t+21$

أدرس تغيرات الدالة f ثم أستنتج إحداثيات M التي تكون فيها المسافة AM أصغرية و نرمز لها في هذه الحالة بـ H

4) ليكن (Q) المستوي العمودي على (D) و المار من النقطة A عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) ثم برهن أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) .

Nafouz

التمرين الثالث (4 نقاط) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0=2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=5-\frac{4}{u_n}$

1) احسب : u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n\le 4$

2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\le \frac{4-u_n}{2}$

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 4-u_n\le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع (7 نقاط) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

2- نضع $a=1$, $b=0$, $c=-3$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3- أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

4- أرسم (T) و (C_f) .

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x)+2f'(x)+f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6- أحسب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$

7- m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2-3+me^x=0$.

التمرين الاول (5 نقاط) :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+10=0$ نحسب المميز $\Delta=-4$ للمعادلة حلين هما $z'=3-i$ و $z''=3+i$

استنتاج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث: $(\bar{z}+2)^2-6(\bar{z}+2)+10=0$ مما سبق نجد أن للمعادلة تكافئ $\bar{z}+2=3-i$ او $\bar{z}+2=3+i$ أي ان $\bar{z}=1-i$ او $\bar{z}=1+i$ و منه $z=1+i$ او $z=1-i$ هما حلى المعادلة الأخيرة

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B، C، D لاحقاتها

$z_A=3-i$ و $z_B=3+i$ و $z_C=1+i$ و و $z_D=1-i$

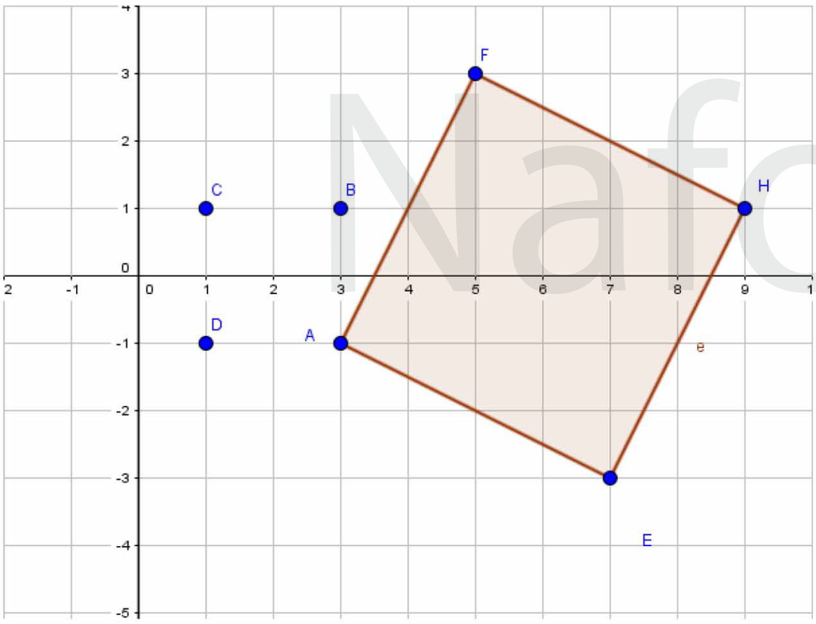
تعيين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$: هي $z'-z_A=i(z-z_A)$ أي $z'-3+i=i(z-3+i)$ و منه $z'=iz+2-4i$

3) E النقطة التي لاحقتها $z_E=7-3i$ و F صورتها بالدوران r

التحقق أن لاحقة F هي $z_F=5+3i$ لدينا $z_F=iz_E+2-4i=i(7-3i)+2-4i=7i+3+2-4i=5+3i$ محققة

تعيين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي $z_H-z_F=z_E-z_A$ و منه $z_H=z_F+z_E-z_A=5+3i+7-3i-3+i=9+i$.

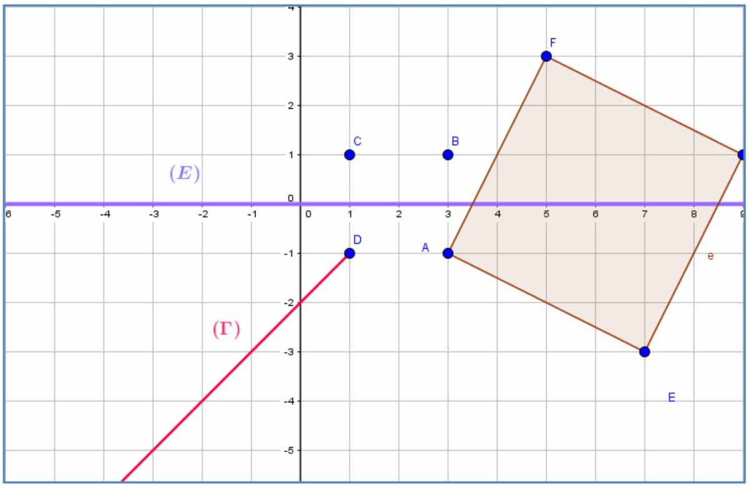
4)تمثيل النقاط A، B، E، F و H



تعيين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و فيه ضلعان متجاورتان متقايسان فهو مربع .

5) تعيين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يمسح $\mathbb{R}^*$ لدينا $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ يعني أن $z-(1-i)=ke^{-\frac{\pi}{4}i}$ أي ان $\arg[z-(1-i)]=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ و هذا يعني $(\overrightarrow{0I};\overrightarrow{DM})=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ و k عدد صحيح

مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[DM)$ و الذي معامل توجيهه -1 (أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $y=-x$)



تعيين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-1-i|=|z-1+i|$ تكافئ $CM=DM$

مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[CD]$.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

ليكن (p_1) و (p_2) المستويان ذا المعادلتين الديكارتيتين على الترتيب :

$$x-2y+4z-9=0 \quad ; \quad -2x+y+z-6=0$$

1) تبين أن (p_1) و (p_2) متعامدان : شعاعيهما الناظيميان $\vec{n}(1;-2;4)$ و $\vec{n'}(-2\,;1;1)$ على الترتيب

نحسب الجداء السلمي نجد $1(-2)+(-2)1+4(1)=0$ و منه متعامدان .

نرمز بـ (D) إلى مستقيم تقاطع المستويين (p_1) و (p_2) .

تبيين أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو :

$$\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \quad : \quad t\in R \\ z=t \end{cases}$$

(D) محتواة في (p_1) يعني $(-7+2t)-2(-8+3t)+4(t)-9=0$ يعني ان 0=0 محققة .

(D) محتواة في (p_2) يعني $-2(-7+2t)+(-8+3t)+(t)-6=0$ يعني ان 0=0 محققة و منه(D) هو تقاطعهما .

2) لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (D) و لتكن A النقطة ذات الإحداثيات$(-1;-4;-9)$.

التحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (p_1) و لا إلى المستوي (p_2)

$(-9)-2(-4)+4(-1)-9=0$ أي ان $-18+4=0$ غير محققة و منه A لا تنتمي الى (p_1)

$-2(-9)+(-4)+(-1)-6=0$ أي ان $18-11=0$ غير محققة و منه A لا تنتمي الى (p_2)

ثم بين أن : $AM^2=14t^2-14t+21$ لدينا $M(-7+2t\,;-8+3t\,;t)$ و منه

$\overrightarrow{AM}(2+2t\,;-4+3t\,;t+1)$ و منه $AM^2=(2+2t)^2+(-4+3t)^2+(t+1)^2$ بالنشر و

التبسيط نجد $AM^2=14t^2-14t+21$ و هو المطلوب .

3) لتكن f الدالة العددية المعرفة على R بـ : $f(t)=14t^2-14t+21$

دراسة تغيرات الدالة f :

النهايات $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

المشتقة : $f'(x)=28t-14$ تنعدم عند $\frac{1}{2}$ و منه f متزايدة على المجال $[0\,;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;0]$.

جدول تغيراتها

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{35}{2}$	↗ $+\infty$

أستنتاج إحداثيات M التي تكون فيها المسافة AM أصغرية و نرمز لها في هذه الحالة بـ H : من جدول تغيرات f نستنتج أن قيمة $t=\frac{1}{2}$ و $AH=\sqrt{\frac{35}{2}}$ و منه $H\left(-6\,;-\frac{13}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

4) ليكن (Q) المستوي العمودي على (D) و المار من النقطة A الشعاع الناظيمي للمستوي (Q) هو شعاع توجيه للمستقيم (D) و منه شعاعه الناظيمي هو $\vec{n}(2;3;1)$ معادلته الديكارتية من الشكل $2x+3y+z+d=0$ بما انه مار بالنقطة A يعني أن $2(-9)+3(-4)+(-1)+d=0$ و منه $d=31$ و منه المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي $2x+3y+z+31=0$.

البرهان أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) :يجب أن تكون H نقطة من (D) و الشعاع $\overrightarrow{AH}$ هو شعاع عمودي على شعاع توجيه هذا المستقيم

$\overrightarrow{AH}\left(3\,;-\frac{5}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$ و شعاع توجيه المستقيم (D) هو $\vec{n}(2;3;1)$ نحسب الجداء السلمي

$$\overrightarrow{AH}.\vec{n}=6-\frac{15}{2}+\frac{3}{2}=\frac{-12+12}{2}=0$$ و منه محققة

التمرين الثالث (4 نقاط) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0=2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=5-\frac{4}{u_n}$

1) حساب : $u_1=5-\frac{4}{2}=3$ و $u_2=5-\frac{4}{3}=\frac{11}{3}$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n\le 4$

لدينا $2\le u_1\le 4$ محققة

نفرض أن $2\le u_n\le 4$ و لنبرهن أن $2\le u_{n+1}\le 4$

Nafouz

$2 \le u_n \le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{u_n} \ge \frac{1}{4}$ بالضرب في -4 نجد $-2 \le -\frac{4}{u_n} \le -1$ بإضافة 5 نجد

$3 \le 5-\frac{4}{u_n} \le 4$ أي ان $2 \le 3 \le u_{n+1} \le 4$ و منه $2 \le u_{n+1} \le 4$ إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن $2 \le u_n \le 4$.

2) تبيين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق

$u_{n+1}-u_n = 5-\frac{4}{u_n}-u_n = \frac{5u_n-4-u_n^2}{u_n} = \frac{(4-u_n)(-1+u_n)}{u_n}$ الفرق موجب لان $2 \le u_n \le 4$ فإن $4-u_n \ge 0$ و $-1+u_n \ge 0$ و هو المطلوب .

استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .

3) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1} \le \frac{4-u_n}{2}$

لدينا $4-u_{n+1} = 4-5+\frac{4}{u_n} = -1+\frac{4}{u_n} = \frac{-u_n+4}{u_n} = \frac{1}{u_n}(4-u_n)$ و بما ان $2 \le u_n \le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4} \le \frac{1}{u_n} \le \frac{1}{2}$ ، و منه $4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$.

4) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le 4-u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ مما سبق نجد أن $0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$

و منه $0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n) \le \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-1})\right]$ أي $0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^2}(4-u_{n-1})$ و ها كذا

$0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^2}(4-u_{n-1}) \le \frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-2})\right]$ أي ان $0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^3}(4-u_{n-2})$ .... إلى أن

نصل إلى التعميم $0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ و منه $0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ اي ان

$0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^{n+1}}(2)$ اي ان $0 \le 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2^n}$ بتعويض نجد $0 \le 4-u_{n'} \le \frac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب .

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ بما أن $n'=n+1$ $0 \le 4-u_n \le \frac{1}{2^{n-1}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ فحسب الحصر

نجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Nafouz

<u>التمرين الرابع (7 نقاط) :</u>

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

$f(0)=-3$ و هذا يعني $c=-3$

و لدينا $f'(x)=(2ax+b)\ e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}$

$f'(0)=3$ يعني أن $b-c=3$; و منه $b=0$

$f(\sqrt{3})=0$ يعني ان $f(\sqrt{3})=(3a-3)e^{-\sqrt{3}}=0$ و منه $a=1$

2- نضع $a=1$, $b=0$, $c=-3$ تصبح $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ لأنه بوضع $x=2t$ نجد

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4t^2}{e^{2t}}\right]=4\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{e^t}\right)^2=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2)e^{-x}=+\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2+2x+3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ متزايدة على المجال $[-1;3]$

و شكل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-2e$ ↗	$\frac{6}{e^3}$ ↘	0

3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y=3x-3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$. اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3};0)$ و $C(-\sqrt{3};0)$

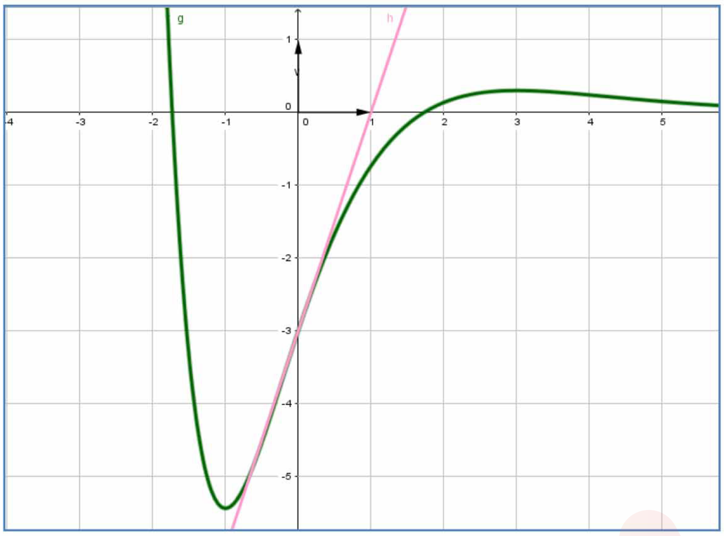
4- رسم (T) و (C_f)

5- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f(x)+2f'(x)+f''(x) = 2e^{-x}$$

و $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$

$f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$



$f''(x)=(-2x+2)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}$ أي ان $f''(x)=(x^2-4x-1)e^{-x}$

و منه $f(x)+2f'(x)+f''(x)=(x^2-3-2x^2+4x+6+x^2-4x-1)e^{-x}=2e^{-x}$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$f(x)+2f'(x)+f''(x)=2e^{-x}$ يكافئ $f(x)=-2f'(x)-f''(x)+2e^{-x}$ و منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث $F(x)=-2f(x)-f'(x)-2e^{-x}$ أي $F(x)=-2(x^2-3)e^{-x}-(-x^2+2x+3)e^{-x}-2e^{-x}$

أي $F(x)=(-2x^2+6)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}-2e^{-x}$ و منه $F(x)=(-x^2-2x+1)e^{-x}$

6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$ هي

$$A=\int_{1}^{\sqrt{3}} -f(x)dx+\int_{\sqrt{3}}^{3} f(x)dx=[-F(x)]_{1}^{\sqrt{3}}+[F(x)]_{\sqrt{3}}^{3}=(4+4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}}+2e^{-1}+(-14)e^{-3}$$

$$A=\left[(4+4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}}+2e^{-1}+(-14)e^{-3}\right]u.a$$

7- m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2-3+me^x=0$

المعادلة تكافئ $me^x=-(x^2-3)$ أي ان $-m=(x^2-3)e^{-x}$ يكافئ $-m=f(x)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=-m$

المناقشة

لما $-m<-2e$ أي ان $m>2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $-m=-2e$ أي ان $m=2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

لما $-3>-m>-2e$ أي ان $3<m<2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m=-3$ أي ان $m=3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

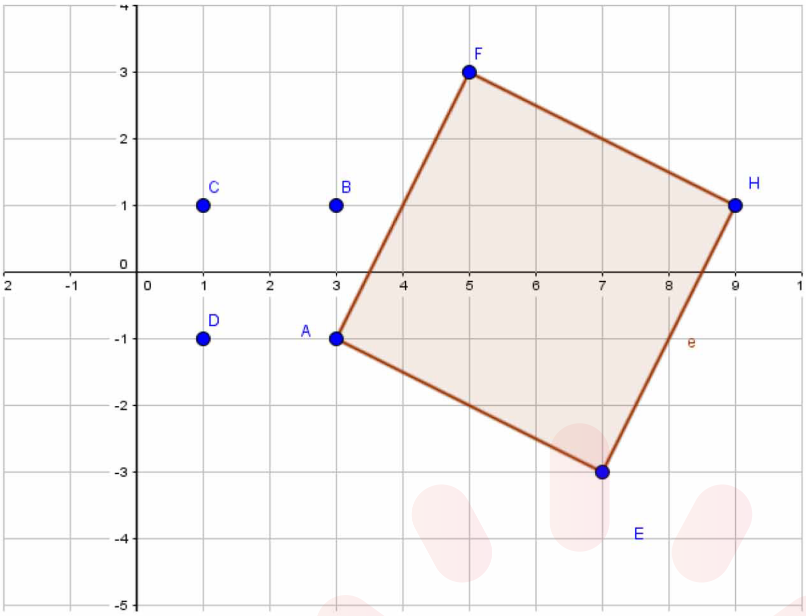
لما $-3 < -m \leq 0$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة .

لما $0 < -m < \frac{6}{e^3}$ أي ان $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلاتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما $-m = \frac{6}{e^3}$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتhن فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة

لما $-m > \frac{6}{e^3}$ أي ان $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

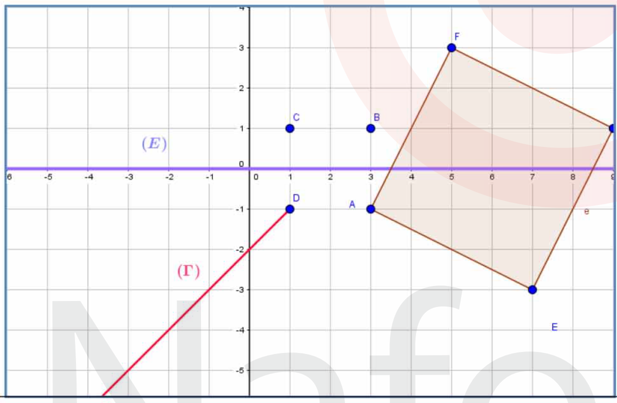
4)تمثيل النقاط A ، B ، E ، F و H — 0.5



تعيين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و فيه ضلعان متجاوران متقايسان فهو مربع . — 0.5

5) تعيين المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم $[DM)$ و الذي معامل توجهيه -1 (أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $y=-x$) — 0.5

تعيين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-1-i|=|z-1+i|$ تكافئ $CM=DM$ مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[CD]$. — 0.5



التمرين الثاني: — 4

-1 تبين أن (p_2) و (p_1) متعامدان : شعاعيهما الناظميان $\overrightarrow{n'}(-2;1;1)$ و $\overrightarrow{n}(1;-2;4)$ على الترتيب نحسب الجداء السلمي نجد $1(-2)+(-2)1+4(1)=0$ و منه متعامدان . — 0.5

نرمز بـ (D) إلى مستقيم تقاطع المستويين (p_2) و (p_1) .

تبيين أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \quad : \quad t\in R \\ z=t \end{cases}$ — 0.25

(D) محتواة في (p_1) يعني $(-7+2t)-2(-8+3t)+4(t)-9=0$ يعني ان $0=0$ محققة . — 0.25

(D) محتواة في (p_2) يعني $-2(-7+2t)+(-8+3t)+(t)-6=0$ يعني ان $0=0$ محققة و منه (D) هو تقاطعهما . — 0.25

-2 التحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (p_1) و لا إلى المستوي (p_2) — 0.25

تبين أن : $AM^2 = 14t^2 - 14t + 21$. — 0.5

3) لتكن f الدالة العددية المعرفة على R بـ : $f(t) = 14t^2 - 14t + 21$

دراسة تغيرات الدالة f :

النهايات $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

المشتقة : $f'(x) = 28t - 14$ تنعدم عند $\frac{1}{2}$ و منه f متزايدة على المجال $[0\,;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$. — 0.5

جدول تغيراتها

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{35}{2}$	↗ $+\infty$

أستنتاج إحداثيات M التي تكون فيها المسافة AM أصغرية و نرمز لها في هذه — 0.5

$H\left(-6\,;-\frac{13}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

4) المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي $2x + 3y + z + 31 = 0$. — 0.5

البرهان أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) :

الجداء السلمي $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n''} = 6 - \frac{15}{2} + \frac{3}{2} = \frac{-12+12}{2} = 0$ و منه محققة — 0.5

التمرين الثالث — 4

1) حساب : $u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3$ و $u_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$ — +0.25 0.25

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \le u_n \le 4$ — 0.5

لدينا $2 \le u_1 \le 4$ محققة

نفرض أن $2 \le u_n \le 4$ و لنبرهن أن $2 \le u_{n+1} \le 4$

$2 \le u_n \le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{u_n} \ge \frac{1}{4}$ بالضرب في -4 نجد $-2 \le -\frac{4}{u_n} \le -1$

بإضافة 5 نجد $3 \le 5 - \frac{4}{u_n} \le 4$ أي ان $2 \le 3 \le u_{n+1} \le 4$ و منه $2 \le u_{n+1} \le 4$ إذن — 0.5

من اجل كل عدد طبيعي n فإن $2 \le u_n \le 4$.

	2) تبيين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n=\frac{(4-u_n)(-1+u_n)}{u_n}$ الفرق موجب. استنتاج أنها متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة . 3- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\le\frac{4-u_n}{2}$ لدينا $4-u_{n+1}=\frac{1}{u_n}(4-u_n)$ و بما ان $2\le u_n\le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4}\le\frac{1}{u_n}\le\frac{1}{2}$ ، و منه $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$. 4- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 4-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ مما سبق نجد أن $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$ و منه $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)\le\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-1})\right]$ أي $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^2}(4-u_{n-1})$ و ها كذا $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^2}(4-u_{n-1})\le\frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-2})\right]$ أي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^3}(4-u_{n-2})$ .... إلى أن نصل إلى التعميم $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ و منه $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ اي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(2)$ اي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^n}$ بتعويض نجد $0\le 4-u_{n'}\le\frac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب . حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$ بما أن $n'=n+1$ و $0\le 4-u_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$ فحسب الحصر نجد $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$	0.5 1 0.5 0.5	
التمرين الرابع	1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c : $b=0$ و $a=1$ و $a=-3$ 2- ..... $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$ حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$	1 +0.25 0.25	(7 نقاط)

0.25 دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2+2x+3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ متزايدة على المجال $[-1;3]$

0.25 و شكل جدول تغيراتها :

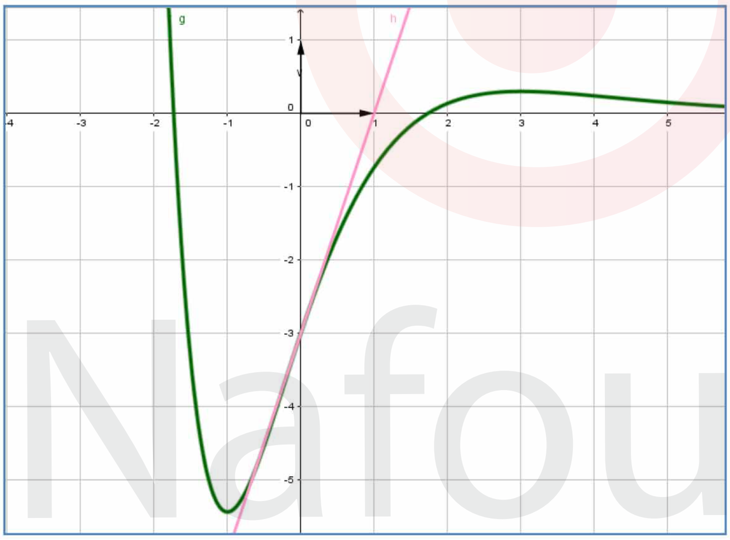
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$\frac{6}{e^3}$	$\searrow$	0

0.5 3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y=3x-3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

0.5 $f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$.اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3};0)$ و $C(-\sqrt{3};0)$

4- رسم (T) و (C_f)

1 

5- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f(x)+2f'(x)+f''(x) = 2e^{-x}$$

0.5 $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$ و $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$

أي ان $f''(x)=(-2x+2)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}$

$f''(x)=(x^2-4x-1)e^{-x}$

و منه

$$f(x)+2f'(x)+f''(x)=(x^2-3-2x^2+4x+6+x^2-4x-1)e^{-x}=2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$f(x)+2f'(x)+f''(x)=2e^{-x}$ يكافئ $f(x)=-2f'(x)-f''(x)+2e^{-x}$ و منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث $F(x)=-2f(x)-f'(x)-2e^{-x}$ أي

0.5 $F(x)=-2(x^2-3)e^{-x}-(-x^2+2x+3)e^{-x}-2e^{-x}$ أي

و منه $F(x)=(-2x^2+6)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}-2e^{-x}$

$$F(x)=\left(-x^2-2x+1\right)e^{-x}$$

6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$ هي

1

$$A=\int_1^{\sqrt{3}}-f(x)dx+\int_{\sqrt{3}}^{3}f(x)dx=\left[-F(x)\right]_1^{\sqrt{3}}+\left[F(x)\right]_{\sqrt{3}}^{3}=\left(4+4\sqrt{3}\right)e^{-\sqrt{3}}+2e^{-1}+(-14)e^{-3}$$

$$A=\left[\left(4+4\sqrt{3}\right)e^{-\sqrt{3}}+2e^{-1}+(-14)e^{-3}\right]u.a$$

7- m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$x^2-3+me^x=0$$

0.25

المعادلة تكافئ $me^x=-\left(x^2-3\right)$ أي ان $-m=\left(x^2-3\right)e^{-x}$ يكافئ

$-m=f(x)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة

$y=-m$

0.75

المناقشة

لما $-m<-2e$ أي ان $m>2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $-m=-2e$ أي ان $m=2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

لما $-3>-m>-2e$ أي ان $3<m<2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m=-3$ أي ان $m=3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

لما $-3<-m\leq 0$ أي ان $0\leq m<3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة .

لما $0<-m<\frac{6}{e^3}$ أي ان $-\frac{6}{e^3}<m<0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلاتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما $-m=\frac{6}{e^3}$ أي أن $m=-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتh فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة

لما $-m>\frac{6}{e^3}$ أي ان $m<-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .